第３講　電磁気学Ⅰ

1

次の文を読んで，[　　　] には適した式または数値を，[- - - -] には適切なグラフを，{　　} からは適切なものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，[[　　　]] はすでに [　　　] で与えられたものと同じ式を表す。また，問 1，問 2 では指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

図 1 のように幅 w，長さ l の長方形の 2 枚の極板 A，B が間隔 d で向かい合わせに配置された平行板コンデンサーを考える。不導体(絶縁体) で作られた水平でなめらかな台の上に極板 A，B は固定されており，その間にあらかじめ帯電していない幅 w の直方体の金属板が極板 A，B と接触しないように挿入されている。これらはすべて不導体の気体中にあり，その気体の誘電率を ε とする。極板は図 1 のように起電力 V の電池と接続されている。

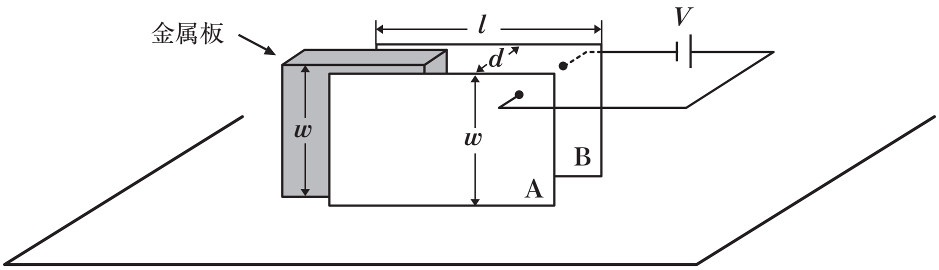


図 1

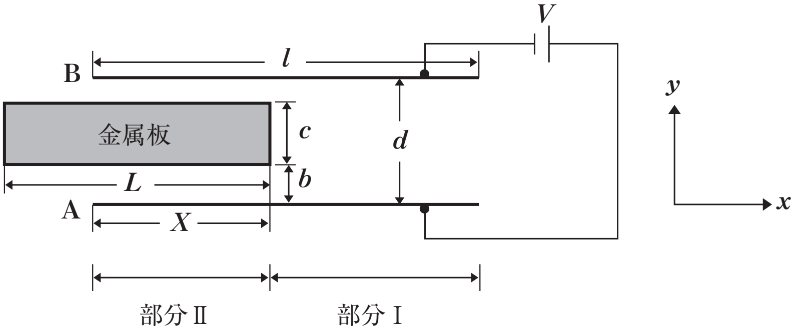


図 2

図 2 は図 1 を台の上方から見たものである。金属板は厚さ c，長さ L であり，極板に平行に極板 A から距離 b 離れ，コンデンサーの左端から長さ X だけ挿入されている。ここで図 2 の右側に示すように x 軸，y 軸を定義し，図 2 の右向きを x の正方向，上向きを y の正方向とする。以下では，極板と金属板の端における電場(電界)の乱れは無視でき，電場は全て y の正方向のみを向いているとする。

＜ Note ＞

このコンデンサーは，図２に「部分Ⅰ」として示した極板間に金属板が存在しない部分と，「部分Ⅱ」として示した極板間に金属板が存在する部分の２つの並列コンデンサーとみなすことができる。このコンデンサーに蓄えられたエネルギーは［イ］である。

このコンデンサーの部分Ⅰについて y の正方向の電位の変化をグラフに表すと，図３のようになる。図３では，極板Ａからの距離を横軸 y にとり，極板Ｂの電位を０とした。この図を参考に，部分Ⅱについて y の正方向の電位の変化をグラフに表すと［ロ］のようになる。（グラフには $y=b$ での電位を式で記入せよ。）

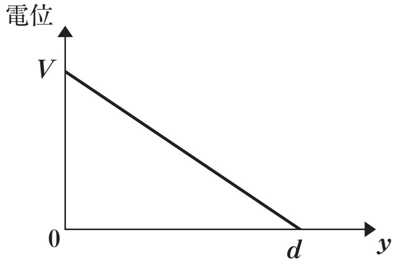


図３

このコンデンサーの部分Ⅰに蓄えられたエネルギーを部分Ⅰの極板間の電場の強さ E を用いて表すと，［ハ］$\times wd(l-X)$ となる。$wd(l-X)$ は部分Ⅰの極板間の空間の体積であるから，その空間には単位体積あたり［ハ］のエネルギーが蓄えられていると考えることができる。このように考えた場合，部分Ⅱの極板間の金属板内に蓄えられる単位体積あたりのエネルギーは［ニ］となる。

ところで，図２の金属板には静電気力がはたらくことがわかっている。このことをつぎのように調べてみよう。ここで，電池の内部抵抗，電池とコンデンサーの間の配線の電気抵抗，金属板内部の電気抵抗，金属板と台の間の摩擦は，いずれも無視できるものとする。

まず，金属板にはたらく静電気力の x 軸に平行な成分について考えよう。静電気力の x 軸に平行な成分につりあう外力を金属板に加え，極板Ａからの距離 b を保ったまま，極板間に存在する金属板の長さを X から $X+\Delta X$ まで微小変化させたとしよう。このときのコンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化量は［ホ］である。また，この間に電池がした仕事は［ホ］$\times$［ヘ］である。コンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化量から電池のした仕事を引いたものが，外力が金属板にした仕事に等しい。このことから，金属板にはたらく静電気力の x 軸に平行な成分の大きさを求めると［ホ］$\div$［ト］となる。また，その方向は｛チ：①　x の正方向　②　x の負方向｝である。

< Note >

問１　金属板にはたらく静電気力の y 軸に平行な成分の大きさはいくらか。その理由とともに記述せよ。

$V=10\mathrm{kV}$, $\varepsilon=8.9\times10^{-12}\mathrm{F/m}$, $w=20\mathrm{mm}$, $l=40\mathrm{mm}$, $d=5.0\mathrm{mm}$ のとき，$c=3.0\mathrm{mm}$, $L=20\mathrm{mm}$ の金属板を $b=1.0\mathrm{mm}$ として極板間に $X=15\mathrm{mm}$ 挿入した。このときに金属板にはたらく静電気力の x 軸に平行な成分の大きさを有効数字２けたで求めると，［リ］N となる。

問２　図２の金属板の代わりに，外形はまったく同じでその内部が空洞になっている金属箱を極板間に挿入することにする。また，その空洞内には誘電率 ε の不導体の気体が入っているとする。この金属箱にはたらく静電気力の x 軸および y 軸に平行な成分は，図２の金属板を用いたときに比べ，それぞれどう変化するか。その理由とともに記述せよ。

< Note >

2

次の文を読んで，[　　　]に適した式をそれぞれの解答欄に記入せよ。文末の問１では指示された条件のグラフを，問２では{　　}から正しいものを選んでその番号を，問３では適切な文章を，それぞれの所定の解答欄に記入せよ。

図１のように，鉛直軸方向に滑らかに動く質量 M のピストン板と固定された底板からなるシリンダーの中に，誘電率が ε の理想気体が n モル(mol)封入されている。両板はともに熱の伝導性がよいため，シリンダー内の気体は常に外気と同じ絶対温度 T に保たれるとする。また，両板はともに面積 A の円盤状の導体で，回路につないでスイッチＳを閉じることにより，両板間に電圧 V をかけることができる。ただし，シリンダーの側面とハンドルは絶縁体でできているとする。ハンドルの質量と ε の気体密度依存性は無視できるものとし，重力加速度を g，外気の圧力を P，気体定数を R とする。また，両板間の距離を z とし，力や電界の向きに関しては，鉛直上向きを正の方向とする。

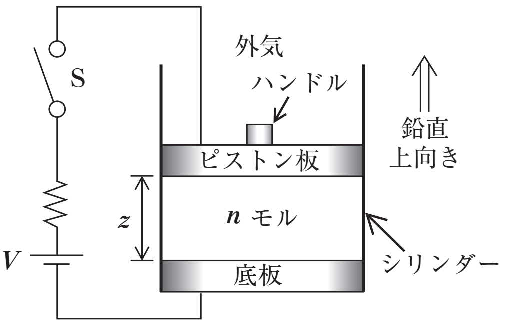


図１

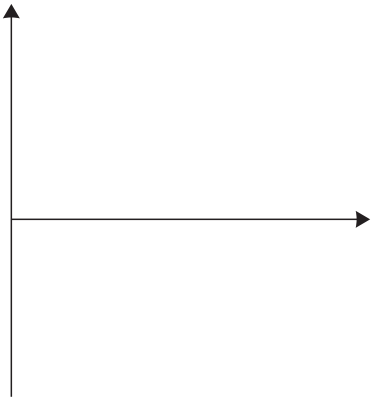
(1)　まず，スイッチＳが開いた状態で，ピストン板と底板はそれぞれ Q，$-Q$ $(Q>0)$ の電荷を帯びているものとする。これらの電荷は両板の互いに向かい合っている面のみに，それぞれ一様な面密度 Q/A，$-Q/A$ で分布している。また両板の面積はともにじゅうぶんに大きいため，これらの電荷により両板間につくられる電界は，場所によらず一定の値 [あ] である。この時ピストン板は，底板上の電荷がつくる電界が及ぼす引力を受ける。[あ] が，ピストン板上の電荷がつくる電界と底板上の電荷がつくる電界との和であることに注意すると，ピストン板にはたらく静電気力が [い] であることがわかる。

＜ Note ＞

(2)　次に，ピストン板を静止させたままスイッチＳを閉じて，両板間に一定の直流電圧 V をかけた。そして，ピストン板を手で支えながらゆっくり移動させ，両板間の体積が zA の位置で静止させたとする。時間が経過して電荷の移動がなくなった状態において，ピストン板を静止させておくのに必要な力を $F(z)$ とする。この $F(z)$ は，V を用いて［ う ］と表される。［ う ］の式から，V がある閾値(しきいち) $V_c=$［ え ］より小さければ，$F(z)$ は $z=a_+$, $z=a_-$ $(a_+>a_-)$ の２ヶ所でゼロになる。つまり，これらの２ヶ所においては，支えていた手を離してもピストン板はその場に静止したままである。両板が全く帯電していないときに $F(z)$ がゼロとなる位置を $z=a_0=$［ お ］とすると，a_+ と a_- は a_0 と V_c を用いてそれぞれ［ か ］，［ き ］と表される。

問１　$V<V_c$ の場合の $F(z)$ の概形を描け。ただし，$z=a_+$，a_- の位置，及び a_0 よりじゅうぶんに大きい z における $F(z)$ の漸近線を図中において明示せよ。

〔解答欄〕



問２　$V<V_c$ の場合に，$z=a_+$ あるいは a_- からずれたところでピストン板を支えていた手を離したとする。手を離した位置が(A) $z<a_-$，(B) $a_-<z<a_+$，(C) $z>a_+$ という３つの場合において，離した直後のピストン板のふるまいは｛①　鉛直下向きに移動する，②　静止したまま，③　鉛直上向きに移動する｝のいずれであるのか，それぞれ該当する番号を選択して答えよ。

問３　一方，$V>V_c$ の場合にはピストン板から手を離すと，ピストン板はどのようにふるまうか，簡潔に説明せよ。

< Note >

第３講　確認テスト

次の文を読んで，［　　　］には適した式を，$\{\quad\}$からは正しいものを選びその番号を，また［［　　　］］には25字～50字の適切なことばを，それぞれ記せ。なお，必要な場合には，微小量xおよび任意の実数kに対して成り立つ近似式，$(1+x)^k \fallingdotseq 1+kx$（ただし，$|x| \ll 1$）を用いよ。

同じ長方形の２枚の導体極板A，Bが間隔dで向かい合わせに配置された平行板コンデンサーを考える。コンデンサーは空気中にあり，空気の誘電率をεとし，極板の端における電界の乱れは常に無視できるものとする。

(1)　図１のように，極板A，Bの辺の長さをa，lとし，極板間に起電力Vの電池とスイッチKを直列につなぐ。スイッチを閉じて十分に時間がたってからスイッチを開いたとき，コンデンサーに蓄えられたエネルギーを，充電された電気量Qを用いて表すと［　イ　］である。

充電されたコンデンサーの極板はクーロン力により互いに引力を及ぼしあっている。この力に抗して一方の極板に外力を加え，極板間の間隔を$d+\Delta d$まで微小変化させたとすると，この変化によるコンデンサーのエネルギーの変化量は［　ロ　］である。このエネルギーの変化量が外力のした仕事に等しいことから，極板間の引力は［　ハ　］に等しいことが分かる。この力の大きさをコンデンサー内の電界の強さEを用いて表し，極板の単位面積あたりの力を求めると［　ニ　］となる。

(2)　次に，向かい合った極板の面積を同時に変えることができる平行板コンデンサーを考えよう。図２のように，両極板はいずれも同じ幅aの２枚の薄い導体板を部分的に重ねて作られている。極板の左右の端には極板間に薄い絶縁性の側板が取り付けられており，右側の側板Wを左右に動かして導体板の重なりを調整することにより，極板の面積を変えることができる。このとき，重ねられた導体板は常に接触しているが摩擦なしに滑らせることができ，また，極板間の間隔dの変化はないとする。このコンデンサーを充電したとき，側板には，上下の極板が押しつける力のほかに横向きの力が働くことが，以下のようにしてわかる。この横向きの力の性質を調べてみよう。

(a)　始めに，極板の左右の長さをlに保ち，(1)の場合と同様に，回路のスイッチKを閉じて充電した後，スイッチを開いておく。ここで，側板に働く横向きの力に抗して側板Wに外力を加え，極板の長さを$l+\Delta l$まで微小変化させたとしよう。この変化によるコンデンサーのエネルギーの変化量を，充電された電気量Qを用いて表すと，［　ホ　］である。このことから，微小変化の間は側板に働く力の大きさは一定であるとみなして側板に加えた外力を求めると，［　ヘ　］となる。

＜ Note ＞

(b)　再び極板の長さを l に戻した後，今度はスイッチ K を閉じたまま，やはり側板 W に横向きの外力を加え，極板の長さを $l+\Delta l$ まで微小変化させたとしよう。この場合に，コンデンサーに蓄えられたエネルギーの変化量は［ト］であり，また，この間に電池がする仕事は，蓄えられた電気量の変化を考慮すれば，［チ］である。したがって，この場合に加えた外力は［リ］となる。

以上より，このコンデンサーの側板 W に働く横向きの力の方向は，(a)の場合には図2の｛ヌ：①左方向，②右方向｝，また，(b)の場合には図２の｛ル：①左方向，②右方向｝であることが分かる。この力の大きさをコンデンサー内の電界の強さ E を用いて表し，側板 W の単位面積あたりの力を求めると，(a)，(b)のいずれの場合も，［ヲ］となる。このような横方向の力が生じるのは，［ワ］が原因である。

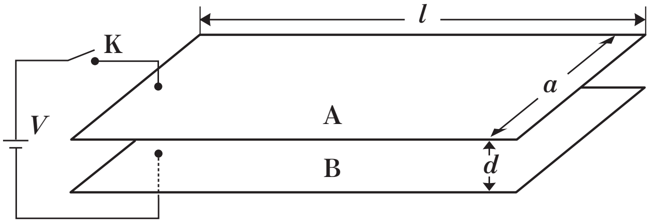


図１

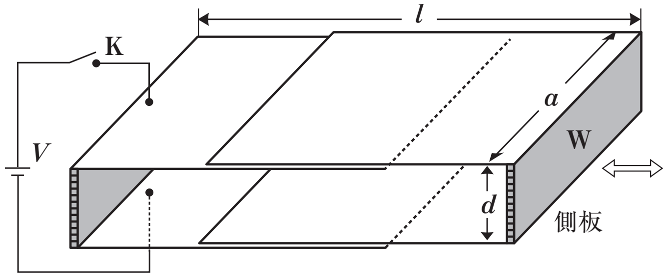


図２

< Note >

第３講　解答

1

イ　$\dfrac{\varepsilon w V^2\{l(d-c)+cX\}}{2d(d-c)}$

ロ　略

ハ　$\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$　　ニ　0　　ホ　$\dfrac{\varepsilon wcV^2}{2d(d-c)}\cdot\Delta X$

ヘ　2　　ト　ΔX　　チ　①　　リ　2.7×10^{-3}

問１　金属板を y 方向に動かしても，静電エネルギーの変化はない。よって力も 0。

問２　金属箱の内側は，静電遮蔽により電場が存在しないので，金属板の場合と変わらない。

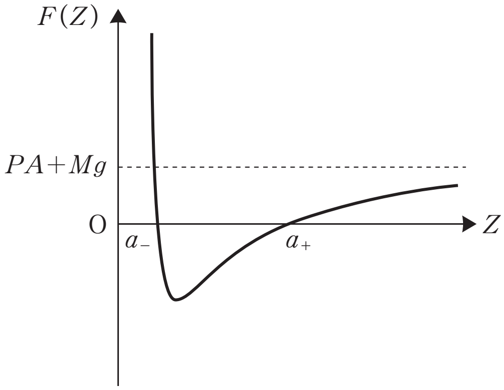
2

あ　$-\dfrac{Q}{\varepsilon A}$　　い　$-\dfrac{Q^2}{2\varepsilon A}$　　う　$PA+Mg-\dfrac{nRT}{z}+\dfrac{\varepsilon AV^2}{2z^2}$

え　$\dfrac{nRT}{\sqrt{2\varepsilon A(PA+Mg)}}$　　お　$\dfrac{nRT}{PA+Mg}$　　か　$\dfrac{a_0}{2}\left(1+\sqrt{1-\dfrac{V^2}{{V_C}^2}}\right)$

き　$\dfrac{a_0}{2}\left(1-\sqrt{1-\dfrac{V^2}{{V_C}^2}}\right)$

問１



問２　(A)　①　　(B)　③　　(C)　①

問３　略

第３講　確認テスト

【解答】

イ　$\dfrac{dQ^2}{2\varepsilon al}$　ロ　$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon al}\Delta d$　ハ　$\dfrac{Q^2}{2\varepsilon al}$　ニ　$\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$　ホ　$-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al}\cdot\Delta l$

ヘ　$-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al^2}$　ト　$\dfrac{\varepsilon aV^2}{2d}\Delta l$　チ　$\dfrac{\varepsilon aV^2}{d}\Delta l$　リ　$-\dfrac{\varepsilon aV^2}{2d}$

ヌ　②　ル　②　ヲ　$\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

ワ　解説参照

【解説】

(1)　$C=\dfrac{\varepsilon al}{d}$とする。

イ　$U_0=\dfrac{Q^2}{2C}=\dfrac{dQ^2}{2\varepsilon al}$

ロ　$\Delta U=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon al}\Delta d$

ハ　$\Delta U=F\cdot\Delta d$　　よって，$f=F=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon al}$

ニ　$\dfrac{f}{al}=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon a^2l^2}=\dfrac{1}{2}\varepsilon\cdot\left(\dfrac{Q}{\varepsilon al}\right)^2=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

(2)

(a)

ホ　$\Delta U'=\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon a(l+\Delta l)}-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al}=\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{\Delta l}{l}}-1\right)\fallingdotseq-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al}\cdot\Delta l$

ヘ　$f'=-\dfrac{Q^2d}{2\varepsilon al^2}$　（負号は，f'の向きがΔlと逆であることを示している。）

(b)

ト　$\Delta U''=\dfrac{1}{2}\Delta CV^2=\dfrac{\varepsilon aV^2}{2d}\Delta l$

チ　$W_E=\Delta Q\cdot V=\Delta CV^2=\dfrac{\varepsilon aV^2}{d}\Delta l$

リ　$f''\cdot\Delta l+W_E=\Delta U''$　より，$f''=-\dfrac{\varepsilon aV^2}{2d}$　（負号は，f''の向きがΔlと逆であることを示している。）

ヌ　②

ル　②

ヲ　$\dfrac{|f'|}{ad}=\dfrac{|f''|}{ad}=\dfrac{1}{2}\varepsilon\left(\dfrac{V}{d}\right)^2=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$

ワ　両極板は，２枚重なっており，同じ符号をもつ電荷が帯電するため反発し斥力が働くこと。